Chapitre 8 : La mécanique céleste

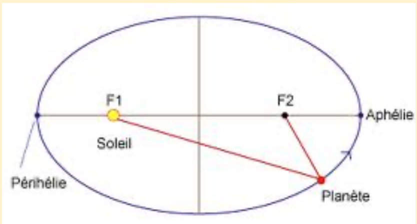
Extrait Programme Tspé

Mouvement des satellites et des planètes. Orbite. Lois de Képler Période de révolution Satellite géostationnaire	- Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien. - Établir et exploiter la troisième loi de Képler dans le cas d'un mouvement circulaire. - PYTHON : Exploiter à l'aide d'un langage de programmation, des données astronomiques ou satellitaires pour tester les deuxième et troisième loi de Kepler.

I- Les lois de Kepler

Première loi de Kepler : loi des orbites

Dans un référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre d'une planète est une ellipse dont le centre du Soleil occupe l'un des foyers.

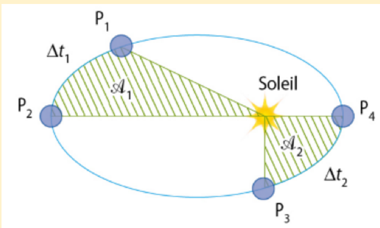


La position la plus proche du Soleil est le périhélie (P), la position la plus éloignée est l'aphélie (A). L'ellipse est définie par son demi-grand axe, noté a. On a 2a = AP.

Remarque : à l'exception de Mercure, les mouvements des planètes peuvent être considérées comme circulaires, les deux foyers sont alors confondus avec le centre du cercle.

Deuxième loi de Kepler : loi des aires

Le segment [SP] qui relie le centre du Soleil à celui de la planète balaie des aires égales ($\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$) pendant des durées égales ($\Delta t_1 = \Delta t_2$)



La valeur de la vitesse d'une planète le long de sa trajectoire elliptique autour du Soleil n'est pas constante : elle est plus grande lorsque la planète est proche du Soleil que lorsqu'elle en est éloignée.

Application : n°33 p 390

Troisième loi de Kepler : loi des périodes
Pour toutes les planètes du système solaire, le rapport du carré de la période de révolution T d'une planète par le cube de la longueur a du demi-grand axe est égal à une même constante :

$$\frac{T^2}{a^3} = k = \frac{4\pi^2}{Gm_O}$$

Remarques :

- La constante k ne dépend que de l'astre attracteur (ici, le Soleil), son expression sera démontrée dans le prochain paragraphe.
- Si le mouvement est circulaire, alors le demi-grand axe a devient le rayon du cercle r : $\frac{T^2}{r^3} = k$

Les lois de Kepler, énoncées pour décrire le mouvement des planètes du système solaire s'appliquent également à tous les satellites en révolution autour d'une planète. Il suffit d'adapter le référentiel à l'étude.

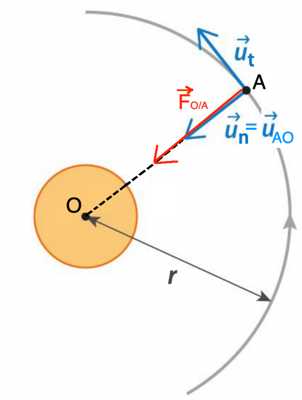
Applications : n°34 p 390, n°36 p 390, n°41 p 391
Application en autonomie : n°26 p 387 (corrigé détaillé dans le manuel)

II- Les satellites en orbite circulaire

On peut faire l'approximation dans certains cas que l'orbite du satellite étudié est circulaire.

1- *Nature du mouvement*

Le système étudié est un satellite A, supposé ponctuel de masse m_A, dans le référentiel astrocentrique galiléen, soumis à l'attraction d'un astre O, de masse m_O. La trajectoire de A est un cercle de rayon r.



Bilan des forces : $\overrightarrow{F_{O/A}} = G \times \frac{m_A \times m_O}{r^2} \overrightarrow{u_{AO}}$
Avec $\overrightarrow{u_{AO}}$ le vecteur unitaire de direction (AO) dirigé de A vers O.

Appliquons la 2ème loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m_A \times \vec{a}$
On peut donc écrire : $G \times \frac{m_A \times m_O}{r^2} \overrightarrow{u_{AO}} = m_A \times \vec{a}$
Soit $\vec{a} = G \frac{m_O}{r^2} \overrightarrow{u_{AO}}$
On se place dans la base de Frénet, on a alors $\overrightarrow{u_{AO}} = \overrightarrow{u_n}$

$$\vec{a} = G \frac{m_O}{r^2} \overrightarrow{u_n}$$

On voit que l'accélération n'a qu'une coordonnée sur le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_n}$ et aucune suivant $\overrightarrow{u_t}$.
On peut alors écrire : $a_t = 0$ (1) et $a_n = G \frac{m_O}{r^2}$ (2)

De plus, d'après le cours du chapitre 5, on connaît les expressions des coordonnées des accélérations dans la base de Frénet.

Les expressions (1) et (2) deviennent alors :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \quad (3)$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = G\frac{m_O}{r^2} \quad (4)$$

L'expression (3) entraîne que la norme de la vitesse est constante à chaque instant.

Dans l'approximation d'une trajectoire circulaire, le mouvement d'un satellite est uniforme

2- *Expression de la vitesse*

L'expression (4) conduit à : $v^2 = G\frac{m_O}{r^2} \times r \rightarrow v^2 = \frac{G \times m_0}{r}$.

Soit $v = \sqrt{\frac{G \times m_O}{r}}$ avec G = $6{,}67.10^{-11}$ $N.m^{-2}.kg^{-2}$, m_O en kg, r en m et v en $m.s^{-1}$.

Remarques :

- Plus un satellite est proche de la planète, plus sa vitesse est grande.
- La vitesse du satellite est indépendante de sa masse, seule la masse de la planète attractive intervient.

3- *La 3ème loi de Kepler*

La période de révolution T est la durée d'une révolution (tour complet) du satellite autour de l'astre. La longueur d'un tour est $L = 2\pi \times r$.

D'après les paragraphes précédents, on sait que la vitesse v est constante : $v = \frac{L}{T}$.

On a donc $T = \frac{L}{v} = \frac{2\pi \times r}{\sqrt{\frac{G \times m_O}{r}}}$

On peut réécrire : $T = 2\pi \times r \times \sqrt{\frac{r}{G \times m_0}} \rightarrow T = 2\pi \times \sqrt{r^2} \times \sqrt{\frac{r}{G \times m_0}} \rightarrow T = 2\pi \times \sqrt{\frac{r^3}{G \times m_0}}$

La période de révolution d'un satellite autour d'un objet de masse m_0, situé à une distance r est donnée par : $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \times m_O}}$ avec T en s, r en m, et m_0 en kg.

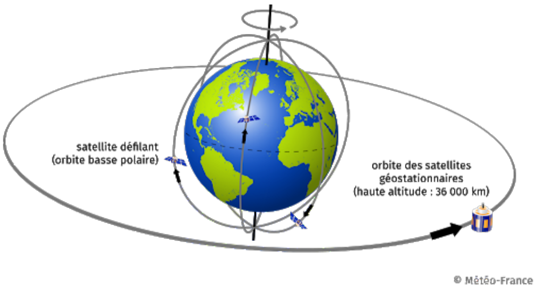
Retrouvons la 3ème loi de Képler :

Élevons la relation précédente au carré : $T^2 = 4\pi^2\frac{r^3}{Gm_O} \Leftrightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_O} = k$

Applications de la partie II : n°42 p 391, n°50 et 51 p 393
Application en autonomie : n°30 p 390

4- *Application : les satellites géostationnaires*

Un satellite géostationnaire est un satellite artificiel immobile par rapport à la Terre.
Sa période de révolution est égale à la durée d'un tour de la Terre sur elle-même, afin que le satellite soit toujours situé au-dessus du même point sur Terre.



Son mouvement est un mouvement circulaire uniforme, mais seule une orbite au-dessus de l'équateur peut être géostationnaire.

Tous les satellites géostationnaires sont situés à la même altitude, qui peut se trouver grâce à la 3ème loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_T} \rightarrow r^3 = T^2 \times G\,\frac{m_T}{4\pi^2}$$

On a G = $6{,}67.10^{-11}$ SI ; m_T = $5{,}97.10^{24}$ kg et T = 86400 s (24 h)

Ainsi r = $4{,}2.10^7$ m = R_T + h
Le rayon de la Terre au niveau de l'équateur est R_T = 6400 km.
On a donc finalement : h = $3{,}6.10^7$ m = 36 000 km.

BILAN : n°38 p 391 (à l'oral)
Application en autonomie : n°29 p 388 (corrigé détaillé)
MÉTHODOLOGIE : analyse dimensionnelle n°48 p 392