DM n°8 – Mécanique céleste – Correction

1. La courbe représentative de T^2 en fonction de a^3 a l'allure d'une droite passant par l'origine, que l'on peut modéliser par une fonction linéaire $T^2 = k.a^3$.
T^2 est proportionnelle à a^2.
Il s'agit de la 3e loi de Kepler, que l'on écrit sous la forme $\frac{T^2}{a^3} = k$.

2. Schéma :

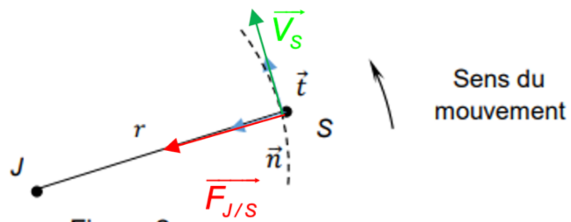

Figure 2.

3. $\overrightarrow{F_{J/S}} = G.\frac{m.M_J}{r^2}.\vec{n}$

4. Système : satellite de masse m. Référentiel : centré sur Jupiter galiléen

2ème loi de Newton : $\overrightarrow{F_{J/S}} = m.\vec{a} \rightarrow G.\frac{m.M_J}{r^2}.\vec{n} = m.\vec{a} \rightarrow \vec{a} = G.\frac{M_J}{r^2}.\vec{n}$

D'autre part, par définition du mouvement circulaire, dans la base de Frénet : $\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{t} + \frac{v^2}{r}.\vec{n}$.

Par analogie entre ces deux expressions du vecteur accélération, on obtient $\frac{v^2}{r} = G.\frac{M_J}{r^2}$.

$v^2 = G.\frac{M_J}{r} \rightarrow v = \sqrt{G.\frac{M_J}{r}}$

5. Le satellite parcourt son orbite de périmètre $2\pi r$ pendant une durée égale à sa période T de révolution : $v = \frac{2\pi.r}{T}$. On a donc en élevant au carré : $v^2 = \frac{4\pi^2.r^2}{T^2}$

De plus, $v^2 = G.\frac{M_J}{r}$ Donc il vient $\frac{4\pi^2.r^2}{T^2} = G.\frac{M_J}{r} \rightarrow \frac{4\pi^2.r^3}{T^2} = G.M_J \rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{G.M_J}{4\pi^2} \rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_J}$

Dans le cas d'une orbite circulaire le demi-grand axe a est égal au rayon du cercle r.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_J}$$

6. D'après la figure 1, $\frac{T^2}{a^3} = k$ où k est le coefficient directeur de la droite ; et $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_J}$.

Donc $k = \frac{4\pi^2}{G.M_J}$ ou $M_J = \frac{4\pi^2}{G.k}$

On calcule le coefficient directeur de la droite avec le point de coordonnées ($a^3 = 0{,}50\times10^{19}$ km^3 ; $T^2 = 210$ j^2).

$k = \frac{210\ \text{j}^2}{0{,}50\times10^{19}\ \text{km}^3} = 4{,}2\times10^{-17}$ j^2.km^{-3} = $4{,}2\times10^{-17}\times7{,}46$ s^2.m^{-3} = $3{,}1\times10^{-16}$ s^2.m^{-3}

$M_J = \frac{4\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\times3{,}1\times10^{-16}} = 1{,}9\times10^{27}$ kg

Ce résultat est cohérent avec la valeur tabulée.

7. D'après la 3e loi de Kepler, pour tous les objets en orbite autour du Soleil :

$\frac{T^2}{a^3} = k$ et d'après Newton, on a $k = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$

$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$ donc $M_S = \frac{4\pi^2.a^3}{G.T^2}$

Pour la Terre, T = 365,25 j et r =a = 150×10^6 km = 1,50×10^{11} m.

$M_S = \frac{4\pi^2 \times \left(1{,}50 \times 10^{11}\right)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times \left(365{,}25 \times 24 \times 3600\right)^2}$ = 2,01×10^{30} kg