Fiche méthode n°4 : L'analyse dimensionnelle

Voir manuel p 601 : fiche méthode n° 5 : Unités et analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet de déterminer la dimension d'une grandeur et donc d'en déduire son unité. Elle permet également de vérifier l'exactitude d'une formule (ou de la retrouver en cas de trou de mémoire…)

I. Les unités et les dimensions

Le système international d'unités définit **sept unités de base** associées à sept grandeurs de base. Toutes les autres unités, appelées **unités dérivées**, peuvent s'exprimer comme une combinaison de ces unités de base.
Par convention, toutes les grandeurs sont organisées selon un système de dimensions.

Grandeur de base	Unité de base	Symbole	Symbole de la dimension
Longueur	mètre	m	L
Masse	kilogramme	kg	M
Temps	seconde	s	T
Courant électrique	Ampère	A	I
Température	Kelvin	K	Θ (théta majuscule)
Quantité de matière	mole	mol	N
Intensité lumineuse	candela	cd	J

Remarque : en chimie, l'unité de base est le gramme.

Les dimensions de toutes les autres grandeurs se déterminent à partir des dimensions des sept grandeurs de base et des équations de la physique.

La dimension d'une grandeur G se note entre crochets : [G] et se lit « dimension de G »
Si [G] = 1, alors G est sans dimension.

Remarque : Les grandeurs sans dimension (densité, indice de réfraction…) n'ont pas d'unité à l'exception des angles qui, bien que sans dimension, s'expriment en radian (rad)

ATTENTION : Ne pas confondre l'unité L (litre) avec la dimension L (longueur).

Ex : On cherche à déterminer la dimension d'une vitesse :
$v = \frac{d}{\Delta t}$ donc $[v] = \frac{[d]}{[\Delta t]} = \frac{L}{T}$ = L.T^{-1}.
La dimension d'une vitesse est donc une longueur divisée par un temps.

II. Détermination d'unités

On peut déterminer l'unité de n'importe quelle grandeur simplement à partir de sa dimension.

Ex : Pour déterminer l'unité d'une force F dans le système international, on détermine sa dimension [F] à l'aide d'une équation de la physique : $P = m \times g$
[F] = $[F] = [m] \times [g]$ = M . L . T^{-2} (g est exprimé en m.s^{-2})
On en déduit que l'unité d'une force dans le système international est le kg.m.s^{-2}.

Certaines unités dérivées portent un autre nom, comme par exemple le newton pour la force.

Application : Retrouver les unités suivantes dans le système international en utilisant les lois de la physique adéquates.

Grandeur	Nom de l'unité	Loi physique	Dimension	Unité SI
Fréquence	Hertz (Hz)	f = 1/T (1/ période)		
Pression	Pascal (Pa)	P = F / S (force / surface)		
Énergie	Joule (J)	E = m c^2 (masse x célérité^2)		
Charge électrique	Coulomb (C)	Q = I x Δt (intensité x durée)		

III. Homogénéité d'une formule

L'analyse dimensionnelle d'une formule permet de vérifier qu'elle est **homogène**, c'est-à-dire que les deux membres de l'égalité ont la même dimension.
Dans le cas contraire, la formule est nécessairement fausse.

Ex : On veut vérifier l'homogénéité de la formule suivante : $T = 2\,\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.M}}$ avec T la période de révolution d'une planète, G la constante gravitationnelle (G = 6,67.10^{-34} m^3.kg^{-1}.s^{-2}), r le rayon de l'orbite circulaire et M la masse de l'astre attracteur.

D'une part, [T] = T D'autre part $\left[2\,\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.M}}\right] = \sqrt{\frac{L^3}{L^3.M^{-1}.T^{-2}.M}} = \sqrt{T^2} = T$
Cette formule est bien homogène.

Remarque : raisonner avec les dimensions plutôt qu'avec les unités a l'avantage de ne pas avoir à effectuer des éventuelles conversions.
Cependant, en rédigeant correctement, il est tout à fait possible de raisonner avec les unités.

Applications :

1- Vérifier que la relation suivante est bien homogène : $n = \frac{\rho V}{M}$ (n : quantité de matière, ρ : masse volumique, V le volume et M la masse molaire)
2- Déterminer les valeurs de α et β afin que la formule suivante soit homogène (k est un nombre sans unité) : $T = k \times L^{\alpha} \times g^{\beta}$ (T = période ; L = longueur ; g = intensité de pesanteur)
3- Déterminer l'unité du coefficient λ intervenant dans la force de frottement fluide : $f = \lambda \times v$ avec v la vitesse du fluide.